

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记3——向量2（点积）

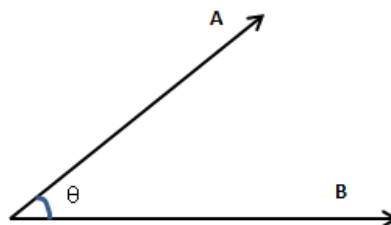
什么是点积

如果A和B都是n维向量，这样定义点积：

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

点积结果是标量。

点积的几何意义是A和B的模乘以二者的夹角正余弦：

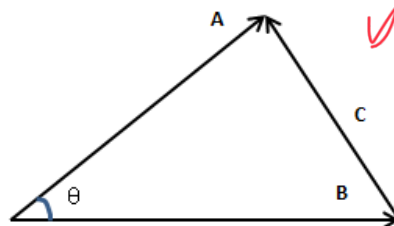


$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$$

在几何意义中，点积同时包含了向量的长度和夹角信息。

代数表达和几何表达是等价的。

用余弦定理解释几何意义



余弦定理是这样说的：已知三角形的两边和夹角，可以知道第三边的长度。根据该定理：

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta$$

如果用向量和点积表达：

$$C = A - B$$

$$|C|^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB = |A|^2 + |B|^2 - 2AB$$

联合两种表达：

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta = |A||A|\cos\theta_{aa} + |B||B|\cos\theta_{bb} + |A||B|\cos\theta_{ab}$$

$$|C||C|\cos\theta_{cc} =$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

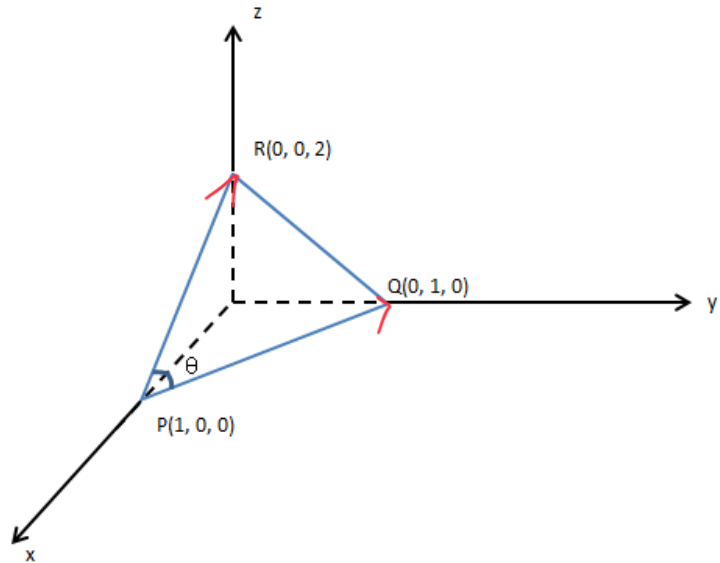
最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

点积的作用

计算向量的角度

可以利用点积计算向量之间的夹角，如下图所示：



$$PQ \cdot PR = |PQ||PR|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{PQ \cdot PR}{|PQ||PR|}$$

$$= \frac{\langle -1, 1, 0 \rangle \cdot \langle -1, 0, 2 \rangle}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71.5^\circ$$

测量向量的方向

根据点积的定义可以看出，点积可能小于0。实际上，只有当夹角小于90°时，点积才是正的。

$$\text{if } \theta < 90^\circ \text{ then } \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$$

$$\text{if } \theta > 90^\circ \text{ then } \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} < 0$$

$$\text{if } \theta = 90^\circ \text{ then } \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

所以说，当两个向量的点积大于0，即夹角小于90°时，我们认为这两个向量的方向大致相同；如果点积小于0，即夹角大于90°是，这两个向量的方向相反；如果点积等于0，二者垂直。这也是另一种理解点积意义的方法——它是测量两个变量相对方向的数字。

判断正交性

所谓正交性就是看两样东西是否互相垂直。

AB 内积为0.
A 垂直 B
 $\theta = 90^\circ$
 $\cos\theta = 0$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好, 不过LU分解的前提是错的, LU分解只需要第三个条件, 如果允许行置换就是下面写到的PLU, 可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好”(2)——欧拉-拉格朗日方程

提个issue, 最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致, 建议以起点为原点, 向右伸出x轴, 向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

这里有个例子:

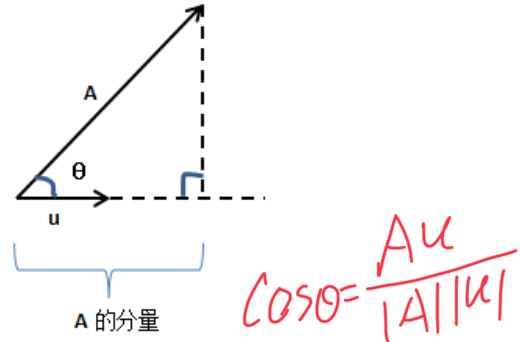
$$x + 2y + 3z = 0$$

高中的知识告诉我们, 这是一个平面表达式, 现在尝试用点积去解释。

根据点积的定义, 令 $\mathbf{A} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, 则: $x + 2y + 3z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 因此, $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, 即 $\mathbf{A} \langle x, y, z \rangle$ 的集合垂直于向量 $\mathbf{B} \langle 1, 2, 3 \rangle$ 。 $\mathbf{B}$ 是有方向的线段, 垂直于 $\mathbf{B}$ 的向量有无数个, 它们共同组成了一个平面, 就是方程的结果集。

求向量的分量

已知向量 $\mathbf{A}$, 可以求得 $\mathbf{A}$ 沿某单位向量 $\mathbf{u}$ 方向的分量, 如下图所示:



由上图可知, 向量在某一方向的分量就是向量在该方向的投影。设 $\mathbf{A}$ 的分量为 $\mathbf{P}$, 则:

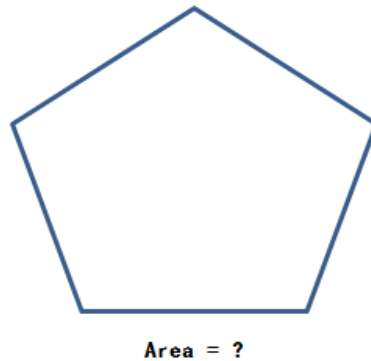
$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{A}| \cos \theta = |\mathbf{A}| |\mathbf{u}| \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

即向量在某一方向上的分量等于该向量与这一方向上的单位向量的点积。

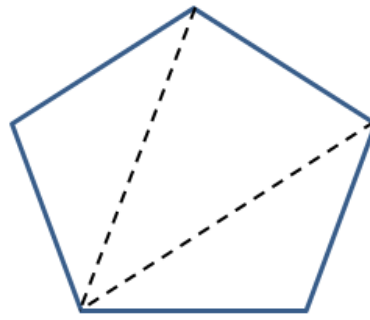
$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{A}| \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

计算面积

能否用向量计算五边形的面积呢?

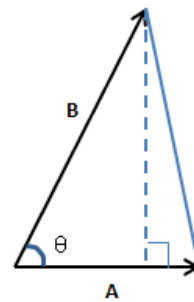


由于不知道五边形的面积公式, 所有首先需要将问题转换, 将五边形切割成三个三角形:



这样问题就转换成用向量求解平面上三角形的面积。

已知向量 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{B}$ ，三角形如下所示：



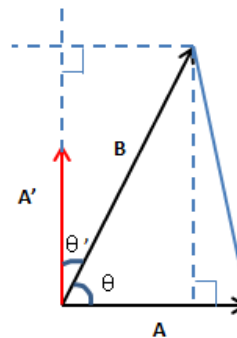
$$Area = \frac{1}{2} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$$

$\sin \theta$

和点积的公式 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$ 十分很相似，可以根据 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 求得 $\sin \theta$ ，这将是漫长的过程。

根据点积的公式，计算 $\cos \theta$ 比 $\sin \theta$ 简单的多，现在的目标就是如何根据 $\cos$ 计算面积。

如果将 $\mathbf{A}$ 逆时针旋转 90° 得到向量 $\mathbf{A}'$ 和夹角 θ' ，如下图所示：



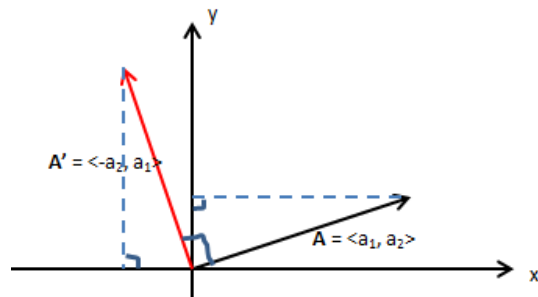
$\cos \theta$

$$\mathbf{A}' \perp \mathbf{A}, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \sin \theta = \cos(\theta')$$

$$|\mathbf{B}| \sin \theta = |\mathbf{B}| \cos(\theta'), \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$$

$$Area = \frac{1}{2} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\mathbf{A}'| |\mathbf{B}| \cos(\theta') = \frac{1}{2} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}$$

问题最终转换成了求 $\mathbf{A}'$ ，也就是 $\mathbf{A}$ 旋转 90° 后的向量：

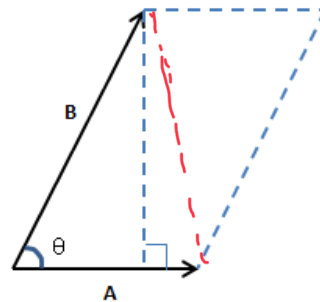


上图中的两个三角形全等，如果 $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ，则 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^\perp = \langle -a_2, a_1 \rangle$ ，对于任意象限，该结论都适用。由此：

$$Area = \frac{1}{2} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \langle -a_2, a_1 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

面积应当是正的，但我们应当注意到上式可能出现负值，所以对结果取绝对值更为恰当。当然，并不影响对问题的描述，当得到负值时自然会想到取绝对值。

理解了三角形的面积，自然也就知道两个向量所在的平行四边形的面积：



$$Area = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

在利用点积计算平行四边形面积时，如果用行列式表达：

$$Area = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

这比原来的方式更加直观。上面行列式的几何意义就是以两个向量为边的平行四边形的面积。

综合示例

示例1

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是不同的向量，求向量 $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ， $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 间的夹角。

可以将 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 看成三个不同方向的三维向量，每个向量的模都是1。根据点积定义：

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{\langle 1, 1, 2 \rangle \cdot \langle 2, -1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

示例2

已知 $P = (a, 1, -1)$, $Q = (0, 1, 1)$, $R = (a, -1, 3)$, 当 $\angle PQR$ 是直角时, $a = ?$

$$\vec{QP} = \langle 0, 1, 1 \rangle - \langle a, 1, -1 \rangle = \langle -a, 0, 2 \rangle$$

$$\vec{QR} = \langle 0, 1, 1 \rangle - \langle a, -1, 3 \rangle = \langle -a, 2, -2 \rangle$$

当 $\angle PQR$ 是直角时, 向量 $\vec{QP}$ 和 $\vec{QR}$ 的点积为 0,

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = (-a) \times (-a) + 0 \times 2 + 2 \times (-2) = a^2 - 4 = 0$$

$$a = \pm 2$$

示例3

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是不同的向量, 求向量 $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 在向量 $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 上的分量。

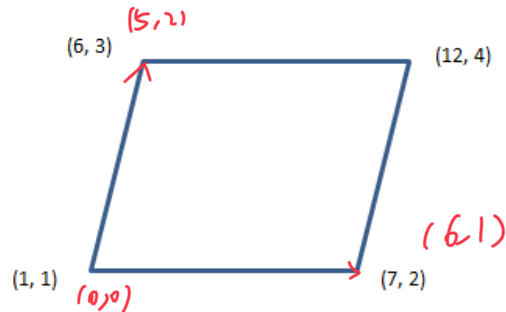
可以将 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 看成三个不同方向的三维向量, 每个向量的模都是 1, $|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}|^2 = 3$

设 $\mathbf{u}$ 是与 $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 同方向的单位向量, 则 $|\mathbf{u}| = 1$, 容易得出 $\mathbf{u} = \langle 3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2} \rangle$

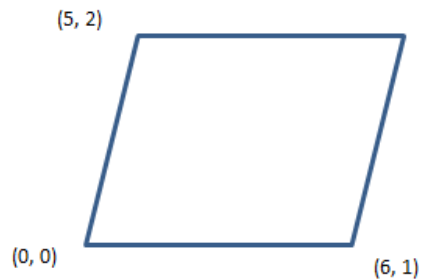
最终, 分量是: $(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u} = \langle 2, -2, 1 \rangle \cdot \langle 3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2} \rangle = 3^{-1/2}$

示例4

求下图平行四边形的面积。



似乎是很简单的点积计算, 需要注意的是, 点积只对向量有意义, 对普通的点则没有任何意义, 所以需要把其中的两边转换成向量:



$$\text{Area} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - 1 \times 5 = 7$$

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

随笔

分类: 线性代数

标签: 点积的意义, 向量点积, 分量, 向量求面积

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

6

推荐

0

反对

« 上一篇: 单变量微积分笔记31——幂级数和泰勒级数

» 下一篇: 线性代数笔记4——向量3（叉积）

posted on 2017-12-21 22:34 我是8位的 阅读(14642) 评论(7) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yozodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes

